

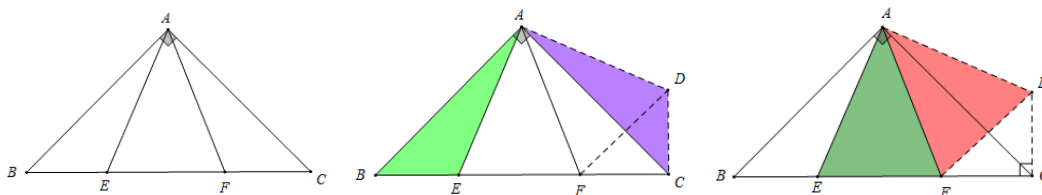
第2讲 旋转基本模型

一、角含半角模型

1. 等腰直角三角形 90° 中含有 45°

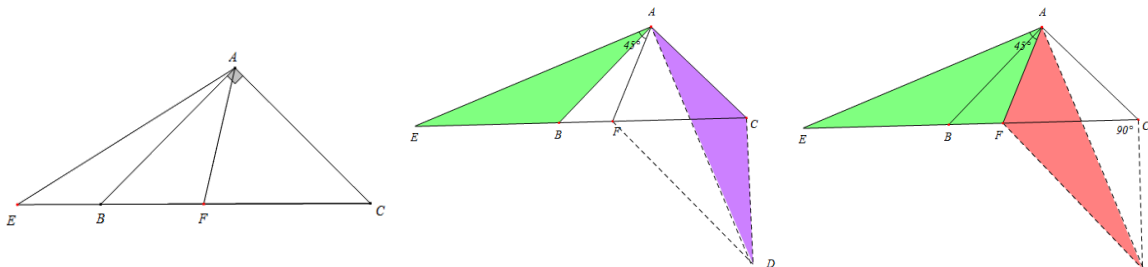
🔔 半角在内向外转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



🔔 半角在外向内转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。

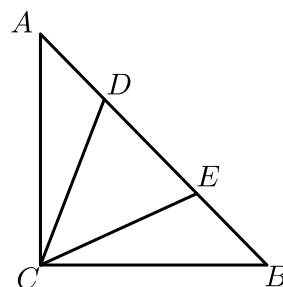


❗ **结论：** $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ， $EF = DF$ ，

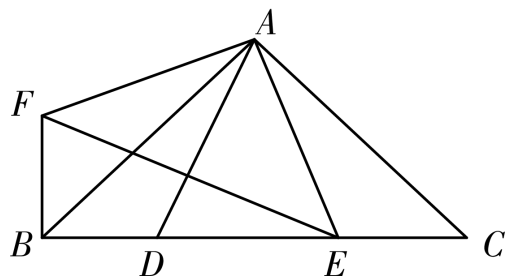
从而推出 $EF = BE + CF$ 。（ BE 、 CF 、 EF 关系）

栗子1

- 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4\sqrt{2}$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 上，且 $AD = 2$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，那么 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 为 BC 上两点， $\angle DAE = 45^\circ$ ， F 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $FB \perp BC$ ， $FA \perp AE$ ，则下列结论：① $CE = BF$ ；② $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；③ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}AD \cdot EF$ ；④ $CE^2 + BE^2 = 2AE^2$ ，其中正确的是()

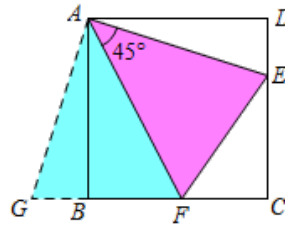
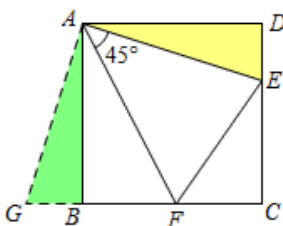
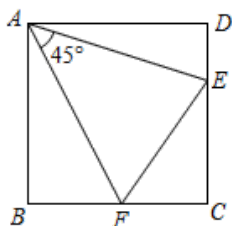


- A. ①②③④ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③

2. 正方形 90° 中含有 45°

半角在内向外转

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



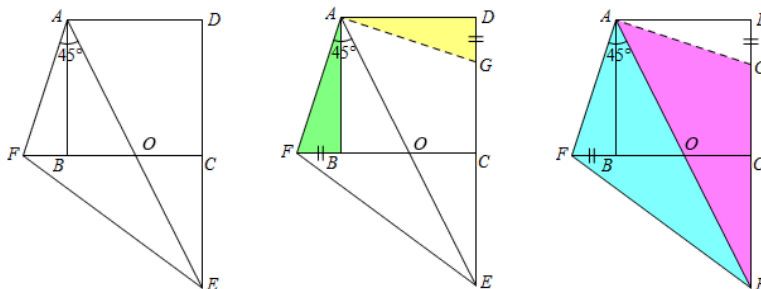
辅助线：延长_____至点 G ，使_____，连接 AG 。“补短法”

！ 结论：

- ① 旋转全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ② 对称全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ③ _____（ EF 、 BF 、 DE 的关系），进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的_____。
- ④ _____平分_____，_____平分_____。
- ⑤ 点 A 到 EF 的距离=_____

半角在外向内转

如图，正方形 $ABCD$ ， $\angle EOF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E ，与 CB 的延长线交于点 F 。



辅助线：在 CD 截取_____，连接 AG 。“截长法”

！结论：

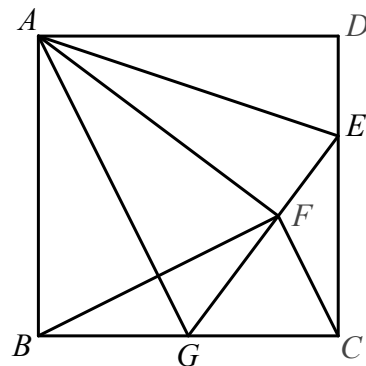
- ① 旋转全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ② 对称全等：_____ $\cong$ _____，理由_____。
- ③ _____。（ EF 、 BF 、 DE 的关系）
- ④ _____平分_____。

栗子2

3. 如图，有一正方形的纸片 $ABCD$ ，边长为6，点 E 是 DC 边上一点且 $DC = 3DE$ ，把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠使 $\triangle ADE$ 落在 $\triangle AFE$ 的位置，延长 EF 交 BC 边于点 G ，连接 BF 。有以下四个结论

- ① $\angle GAE = 45^\circ$ ；
- ② $BG + DE = GE$ ；
- ③ 点 G 是 BC 的中点；
- ④ 连接 FC ，则 $BF \perp FC$ 。

其中正确的结论序号是（ ）。



A. ①②③④

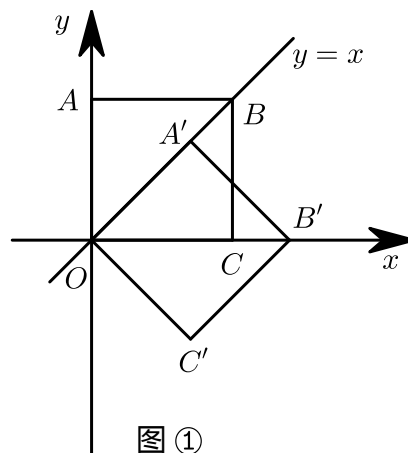
B. ①②③

C. ①②

D. ②③

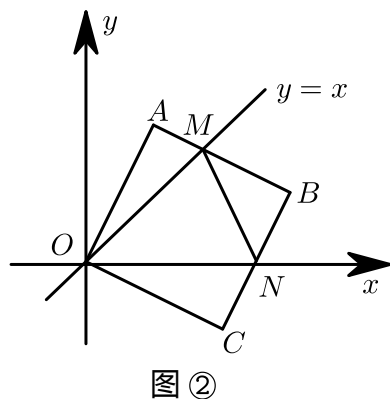
4. 在平面直角坐标系中， O 为原点，边长为2的正方形 $OABC$ 的两顶点 A ， C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转．

- (1) 如图①，当点 A 的对应点 A' 落在直线 $y = x$ 上时，点 A' 的对应坐标为 _____ ；点 B 的对应点 B' 的坐标为 _____ ．



- (2) 旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N ，当 A 点第一次落在直线 $y = x$ 上时，停止旋转．

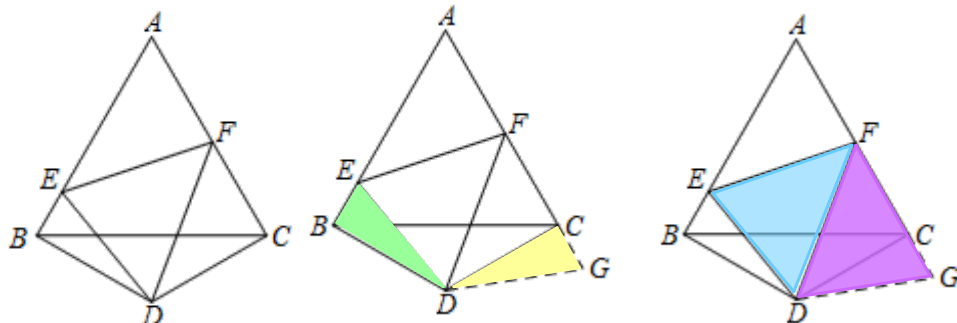
- ① 如图②，在正方形 $OABC$ 旋转的过程中，线段 AM ， MN ， NC 三者满足什么样的数量关系？请说明理由．



- ② 当 $AC \parallel MN$ 时，求 $\triangle MBN$ 内切圆的半径（直接写出结果即可）．

3. 等腰三角形 120° 中含有 60°

如图，已知，等边 $\triangle ABC$ ， $DB = DC$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ， $\angle EDF = 60^\circ$ 。



辅助线：延长 AC 至 G ，使得_____，连接 DG 。

！ 结论：

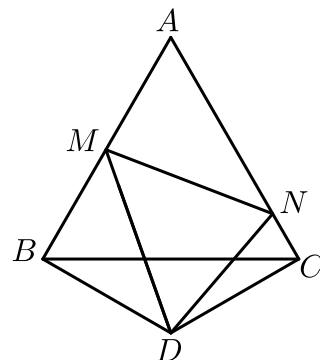
①旋转全等：_____ $\cong$ _____， $DE =$ _____， $\angle BDE =$ _____，

②对称全等：再证_____ $\cong$ _____， $EF =$ _____，

故_____。（ EF 、 BE 、 CF 的关系）

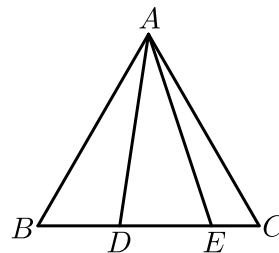
栗子3

5. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 10cm 的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ 。以 D 为顶点作一个 60° 的角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为_____。



变式

6. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 为 BC 边上的点， $BD = 2CE$ ， $\angle DAE = 30^\circ$ ， $DE = 3$ ， CE 的长为_____。



7. 解答下列各题 .

(1) 思维探究 :

如图1, 点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 连接 EF , 则三条线段 EF, BE, DF 满足的等量关系式是 _____ ; 小明的思路是: 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABG$ 的位置, 并说明点 G, B, E 在同一条直线上, 然后证明 $\triangle AEF \cong$ _____ 即可得证结论 .
(只需填空, 无需证明)

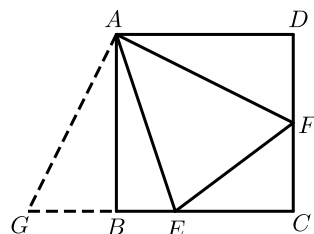


图 1

(2) 思维延伸 :

如图2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 均在边 BC 上, 点 D 在点 E 的左侧, 且 $\angle DAE = 45^\circ$. 猜想三条线段 BD, DE, EC 应满足的等量关系, 并说明理由 .

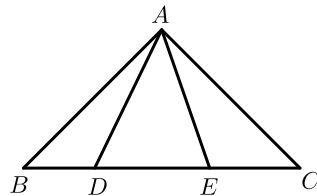


图 2

(3) 思维拓广 :

如图3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC = 5$, 点 D, E 均在直线 BC 上, 点 D 在点 E 的左侧, 且 $\angle DAE = 30^\circ$, 当 $BD = 1$ 时, 请直接写出线段 CE 的长 .

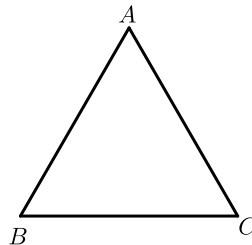
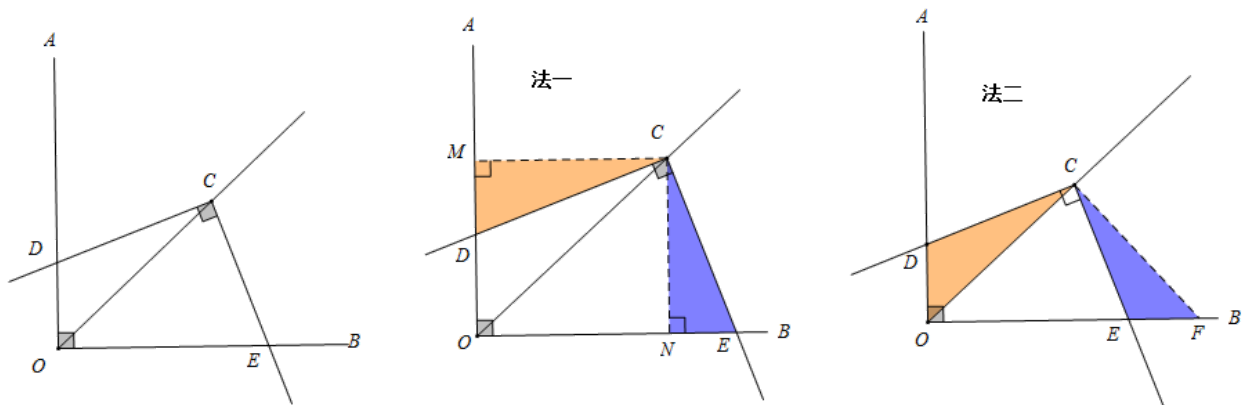


图 3

二、 对角互补模型

如图，已知 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ， D 、 E 在 OA 、 OB 上。



法一：过点 C 作 $CM \perp OD$ 于 M ， $CN \perp OB$ 于 N ，利用_____证明_____ $\cong$ _____。

法二：将 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 交 OB 于 F ，利用_____证明_____ $\cong$ _____。

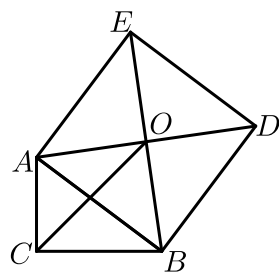
！ 结论：① $CD =$ _____；

② $OD + OE =$ _____ $=$ _____ OC ；

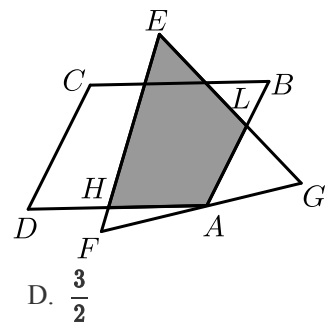
③ $S_{\text{四边形}ODCE} =$ _____。

栗子4

8. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 OC 的长为 _____ cm。



9. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 是等边 $\triangle EFG$ 边 FG 的中点， $\angle B = 60^\circ$ ， $EF = 2$ ，则阴影部分的面积为 ()。



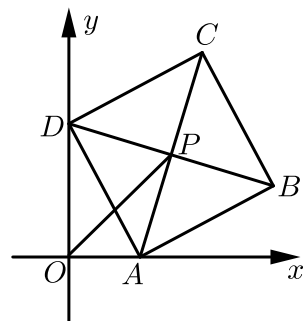
A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

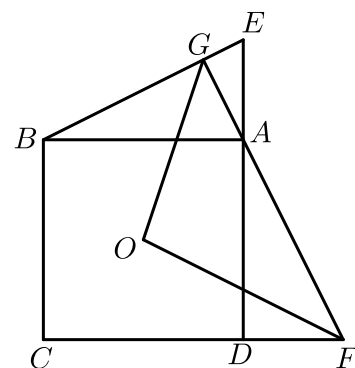
D. $\frac{3}{2}$

10. 已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A, D 都不与原点重合），顶点 B, C 都在第一象限，且对角线 AC, BD 相交于点 P ，连接 OP 。



- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^{\circ}$ 。
- (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$ 。
- (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A, D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____。

11. 点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，点 E, F 分别在 DA, CD 的延长线上， $AE = DF$ ，连接 BE, AF ，延长 FA 交 BE 于 G ，连接 OG 。



- (1) 求证： $BE \perp AF$.
- (2) 求 $\angle BGO$ 的度数 .
- (3) 若 $AE = 1, AB = 2$ ，求 AG 的长 .